DS2 VERSION B
CORRECTION

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Barème et exigences.

Exercice 1 : 10 points. Il s'agit d'un exercice un peu bizarre. Le sujet donne en fait un prétexte pour citer une large partie du cours.

Les deux options d'ordonner ou non les bases se défendent et il n'y a pas de raison d'en choisir une plutôt qu'une autre arbitrairement, seule l'argumentation a de la valeur ici, et l'utilisation appropriée des énoncés du cours.

Exercice 2 : 14 points.

1. 4 points, il faut clairement faire apparaître les 4 propriétés requises sur f (1 point pour chaque).
2. **a.** 1 point, on calcule la limite facilement avec le théorème des gendarmes.
   b. 1 point, facile aussi.
   c. 2 points, dont un pour justifier de la dérivabilité.
   d. 2 points.
   e. 2 points, il suffit de constater que $g(x) \underset{x\to 0}{=} \mathbf{o}\left(x^2\right)$ (mais il faut y penser).
3. 2 points, 1 pour citer la formule de Taylor à l'ordre 2 (avec ses hypothèses) et 1 pour dire qu'on vient de montrer qu'il n'y a pas besoin que f soit $\mathcal{C}^2$.

Exercice 3 : 35 points.

1. **a.** 1 points.
   b. 3 points, 1 pour la résolution du système (c'est très simple), 2 pour commenter sur le fait qu'on a trouvé une base de solutions.
   c. 2 points : 1 point pour le théorème du rang, 1 point pour l'argument de dimension. D'autres stratégies sont possibles mais personne n'a tenté autrement.
   d. 2 points. Un peu de calcul mais pas vraiment de difficulté.
   e. 1 point.
   f. 1 point.
   g. 1 point.
2. **a.** 2 points, 1 pour le calcul, 1 pour la conclusion.
   b. 2 points. Beaucoup de calcul.
   c. 2 points.
   d. 1 point.
   e. 1 point.
   f. 1 points.
3. 2 points, question difficile.

Date: 4 Octobre 2024 14h00-18h00.
http://louismerlin.fr.

4. 1 point, il suffit de récapituler.
5. **a.** 2 points. Beaucoup de calculs.
   b. 2 points, 0 si manipulation illégale de matrices (diviser par une matrice,...)
6. **a.** (i) 2 point.
   (ii) 2 points.
   b. 1 point.
7. **a.** 1 point.
   b. 2 points, quelques points de rédaction délicats.

Exercice 4 : 45 points.

1. **a.** 8 points, 2 par ligne.
   b. 6 points, 2 pour analyser `L`, 2 pour `c` et 2 pour comprendre ce que donne le programme.
   c. 2 points pour la conjecture, aucune justification n'est demandée.
2. 2 points, une rapide justification suffit.
3. **a.** 1 point, aucune justification attendue.
   b. 3 points, 1 pour reconnaître la loi (avec les bons paramètres), 1 pour l'espérance, 1 pour la variance.
4. 3 points, 1 pour la relation, 1 pour l'espérance, 1 pour le commentaire sur le cas $p = 1/2$.
5. 3 points, 2 pour la loi de X_{2n} et 1 pour l'expression de p_n.
6. **a.** 3 points, 1 pour chaque.
   b. (i) 1 point, c'est la définition du coefficient binomial.
   (ii) 4 points pour la fonction, quelques points généreux pour la structure du programme.
   c. 2 points, dont 1 pour la seule mention de la formule du binôme.
   d. 2 points, dont un pour la seule mention de la symétrie des coefficients binomiaux.
7. **a.** 2 points.
   b. 2 points.
   c. 1 point.
8. 7 points, 3 pour p_1, p_2, p_3, 2 pour la formule, 1 pour la limite, 1 pour confronter le résultat à la conjecture.

Total : 104 points. Le total obtenu est divisé par 4 (et arrondi au 1/2 point supérieur pour faire une note sur 20 (il y a 26 points à prendre).

Commentaires généraux/erreurs fréquentes.

Rédaction / Stratégie.

Exercice 1.

Exercice 2.

Exercice 3.

Exercice 4.

Correction détaillée.

Correction 1 *Quelques idées.*

La notation

$$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$$

signifie que les vecteurs de la base sont ordonnées. Tandis que dans la notation

$$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\},$$

l'ordre des éléments n'a pas d'importance. Faisons maintenant le tour des raisons qui pourraient nous pousser à choisir l'une ou l'autre alternative.

1. **Arguments en faveur de $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$.**

   Pour définir une base, il n'est pas besoin d'ordonner les vecteurs. En effet, dire que la famille est génératrice signifie que

   $$\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n) = E$$

   et ceci ne demande pas de choisir un ordre ($\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \cdots, e_n) = \mathrm{Vect}(e_2, e_1, \cdots, e_n)$ par exemple).

   De la même manière, dire qu'il n'existe pas d'autre combinaison linéaire que la combinaison triviale qui soit égale au vecteur nul ne requiert aucun ordre sur les vecteurs (une combinaison linéaire de $e_1, e_2, \cdots, e_n$ est aussi une combinaison linéaire de $e_2, e_1, \cdots, e_n$ par exemple, grâce à l'axiome de commutativité de la loi interne des espaces vectoriels).

2. **Arguments en faveur de $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$.**

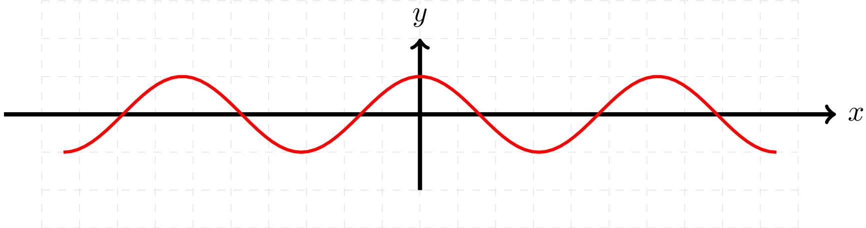
   S'il n'y a pas besoin d'un ordre pour définir une base, il faut en revanche un ordre pour définir les coordonnées d'un vecteur dans une base. En effet, dans $\mathbb{R}^2$ par exemple, muni de sa base canonique $((1,0);(0,1))$ (dans cet ordre !), le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ n'est pas le même vecteur que le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

   Le fait de pouvoir choisir des coordonnées uniques à chaque vecteur est la propriété la plus importante d'une base, celle qui permet de ramener tous les problèmes d'algèbre linéaire à des résolution de systèmes, et il serait dommage de s'en priver en ne choisissant pas l'ordre des vecteurs de la base.

3. **Conclusion.** Dans une perspective *minimaliste*, on préfère ne pas donner d'ordre aux vecteurs d'une base, puisqu'une base se définit s'en avoir à choisir un ordre. Dans une perspective *utilitariste*, pour pouvoir donner aux vecteurs des coordonnées, on préfère ordonner les vecteurs d'une base.

Correction 2

1.



Cette fonction est visiblement bornée et n'a pas de limite en $+\infty$ parce qu'elle oscille. Sa dérivée est aussi bornée parce que les variations de la fonctions sont périodiques et la dérivée oscille de la même façon que f.

2. **a.** Puisque g est bornée, notons $m = \min\{f(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ et $M = \max\{f(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ On a donc
$$m\left|x^3\right| \leqslant |g(x)| \leqslant M\left|x^3\right|$$
et le théorème des gendarmes s'applique et montre que $|g(x)|$ tend vers 0 en 0. Et donc
$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0.$$
Puisque $g(0) = 0$, ceci signifie que g est continue en 0.

b. La taux d'accroissement en 0 se calcule facilement :
$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$$
et le même argument de théorème des gendarmes montre que le taux d'accroissement converge en 0. On conclut que $g'(0)$ existe et vaut 0.

c. Si $x \neq 0$, g est dérivable comme composée, produit et inverse avec un dénominateur qui ne s'annule pas de fonctions dérivables. Et
$$g'(x) = 3x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) - x f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

d. On calcule alors le taux d'accroissement de la fonction g' en 0 :
$$\frac{g'(x) - g'(0)}{x} = \frac{3x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) - x f'\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = 3x f\left(\frac{1}{x}\right) - f'\left(\frac{1}{x}\right).$$
Toujours le même argument de théorème des gendarmes montre que
$$\lim_{x \to 0} 3x f\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$
Mais par ailleurs, d'après l'hypothèse que nous avions faite sur f, on sait que $f'\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en lorsque x tend vers 0 (sinon f' en aurait une à l'infini). On en conclut que le taux d'accroissement n'a pas de limite et que g' n'est pas dérivable en 0

e. On peut facilement montrer que
$$g(x) = \underset{x \to 0}{\mathbf{o}}\left(x^2\right)$$
et donc g admet un développement limité en 0 à l'ordre 2 (toute la partie principale est nulle).

3. Nous avons trouvé un exemple de fonction qui n'est pas dérivable deux fois mais qui pourtant admet un développement limité à l'ordre 2. C'est un contre-exemple à la réciproque de la formule de Taylor à l'ordre 2 qui affirme que si g est dérivable deux fois en 0, alors g admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

Correction 3 **1.** **a.** On prend donc comme d'habitude deux matrices A_1 et A_2 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, alors $\alpha A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} \alpha a_1 + a_2 & \alpha b_1 + b_2 \\ \alpha c_1 + c_2 & \alpha d_1 + d_2 \end{pmatrix}$ et on obtient

$$\mathrm{tr}(\alpha A_1 + A_2) = \alpha a_1 + a_2 + \alpha d_1 + d_2 = \alpha(a_1 + d_1) + a_2 + d_2 = \alpha \mathrm{tr}(A_1) + \mathrm{tr}(A_2),$$

ce qui montre bien que la trace est linéaire.

b. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} A \in \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) &\iff a + d = 0 \\ &\iff a = -d \\ &\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \\ &\iff A \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

On a donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$. On vérifie facilement que les trois matrices qui engendrent $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ sont libres et on a donc trouvé une base de $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$.

c. On sait que $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$ et puisque $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ est de dimension 3, le théorème du rang donne

$$\mathrm{rg}(\mathrm{tr}) = 4 - 3 = 1.$$

Or l'image de la trace est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. Mais il n'y a qu'un seul sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ qui est de dimension 1 : c'est $\mathbb{R}$ lui-même. Ainsi $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{R}$.

d. C'est une question de calculs. On pose

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

Alors

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & \star \\ \star & cy + dt \end{pmatrix}$$

et

$$BA = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa + yc & \star \\ \star & zb + td \end{pmatrix}$$

et on constate que ces deux matrices ont même trace (la notation $\star$ signifie qu'on ne cherche pas à calculer le coefficient de la matrice, parce qu'il est sans influence sur la trace).

e. Dans la formule précédente, on remplace A par P^{-1} et B par AP et il vient

$$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(APP^{-1}) = \mathrm{tr}(A).$$

f. Si deux matrices A et B sont semblables, alors il existe P tel que $B = PAP^{-1}$ et d'après la question précédente, $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

g. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et ces deux matrices ont bien même trace (qui d'ailleurs vaut $a + d$).

2. **a.** On a

$$\mathrm{d}(2I) = \mathrm{d}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = 4 = 4\mathrm{d}(I) \neq 2\mathrm{d}(I)$$

et donc d n'est pas linéaire.

b. On pose à nouveau

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

et on calcule

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{array}{rcl} \det(AB) & = & (ax+bz)(cy+dt)-(cx+dz)(ay+bt) \\ & = & axcy+axdt+bzcy+bzdt-cxay-cxbt-dzay-dzbt \\ & = & axdt+bzcy-cxbt-dzay \end{array}$$

Et

$$BA = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa+yc & xb+yd \\ za+tc & zb+td \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{array}{rcl} det(BA) & = & (xa+yc)(zb+td)-(za+tc)(xb+yd) \\ & = & xazb+xatd+yczb+yctd-zaxb-zayd-tcxb-tcyd \\ & = & xatd+yczb-zayd-tcxb \end{array}$$

On constate finalement que ces deux expressions sont les mêmes.

c. Si P est inversible, c'est donc qu'il existe une matrice notée P^{-1} telle que $PP^{-1} = I$. D'après la formule qui précède, on a alors $\det(PP^{-1}) = \det(P)\det(P^{-1})$. Mais par ailleurs $\det(PP^{-1}) = \det(I) = 1$. Le nombre $\det(P)$ ne peut pas être nul sinon le produit $\det(P)det(P^{-1})$ le serait aussi (mais il vaut 1).

d. On raisonne exactement comme pour la trace.

e. Idem.

f. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et

$$\det(A) = ad - bc \quad \text{et} \quad \det({}^tA) = ad - cb.$$

On voit alors que A et ${}^tA$ ont même déterminant.

3. C'est une question un peu difficile pour les carrés mais classique pour les cubes. On peut par exemple prendre comme contre-exemple les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que $\det(M) = \det(N) = 1$ tandis que $\operatorname{tr}(M) = \operatorname{tr}(N) = 2$. Or ces matrices ne sont pas semblables car il n'y a pas de matrice semblable à N autre que N elle-même. En effet, une matrice semblable à N est une matrice de la forme PNP^{-1}. Mais N est la matrice identité et commute donc avec la matrice P, de sorte que $PNP^{-1} = N$. La matrice M n'étant pas égale à la matrice N, elle ne peut donc être semblable à N.

4. D'après la question **1.f**, si A est semblable à D, alors elle a la même trace que D. Or $\operatorname{tr}(D) = \lambda_1 + \lambda_2$. Donc $\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$. D'après la question **2.e**, si A est semblable à D, alors elle a le même déterminant que D. Or $\det(D) = \lambda_1\lambda_2$. Donc $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$.

5. **a.** C'est encore une question de calcul : on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on a

$$\begin{aligned}
A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I &= \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)^2 - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a^2-ad & -ab-db \\ -ac-dc & -ad-d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2+bc-a^2-ad+ad-bc & ab+bd-ab-db \\ ca+dc-ac-dc & cb+d^2-ad-d^2+ad-bc \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b. Si A est une matrice de déterminant non nul, on peut tirer de l'égalité

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I$$

la relation

$$A\left(-\frac{1}{\det(A)}A + \frac{\operatorname{tr}(A)}{\det(A)}I\right) = I,$$

ce qui montre bien que A est inversible et que $A^{-1} = -\frac{1}{\det(A)}A + \frac{\operatorname{tr}(A)}{\det(A)}I$.

6. **a.** (i) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $Ae_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et la relation $Ae_1 = \lambda_1 e_1$ donne

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc $a = \lambda_1$ et $c = 0$.
De même $Ae_2 = \lambda_2 e_2$ donne $d = \lambda_2$ et $b = 0$. Ainsi la matrice A est égale à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

En particulier si $\lambda_1 = \lambda_2$, alors A est colinéaire à I, ce qui est exclu.

(ii) On sait déjà que si $Ae_1 = \lambda_1 e_1$ et $Ae_2 = \lambda_2 e_2$, alors A est diagonale, égale à $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.
Exprimons ensuite la relation $Aw = \lambda_3 w$.

$$Aw = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Si $Aw = \lambda_3 w$, on obtiens

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

et finalement $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, ce qui est toujours exclu.

b. Parmi les trois vecteurs e_1, e_2 et w, il y en a donc un (au moins) qui vérifie $Ax \neq \lambda x$. Pour ce choix de vecteur x parmi les trois, on vient donc de montrer que les deux vecteurs x et Ax ne sont pas colinéaires. C'est donc une famille libre de $\mathbb{R}^2$. Mais puisque $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2, c'est une base.

7. **a.** Il s'agit donc d'exprimer les images des vecteurs x et Ax en coordonnées dans x et Ax. Pour le vecteur x, on a évidemment

$$Ax = 0 \times x + 1 \times Ax$$

et la première colonne de l'endomorphisme associé à A dans cette base est donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour la deuxième colonne, on utilise la question **5.a** : on a

$$A(Ax) = A^2x = \operatorname{tr}(A)Ax - \det(A)x$$

et la 2ème colonne de la matrice de l'endomorphisme associé à A est alors $\begin{pmatrix} -\det(A) \\ \mathrm{tr}(A) \end{pmatrix}$. En résumé, si on note f l'endomorphisme associé à A, alors

$$\mathrm{Mat}(f,(x,Ax)) = \begin{pmatrix} 0 & -\det(A) \\ 1 & \mathrm{tr}(A) \end{pmatrix}.$$

b. Si on note g l'endomorphisme associé à ${}^tA$, le travail précédent permet de trouver une base $\mathcal{B}$ dans laquelle

$$\mathrm{Mat}(g,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & -\det({}^tA) \\ 1 & \mathrm{tr}({}^tA) \end{pmatrix}.$$

Or, on a montré précédemment qu'une matrice et sa transposée avaient même déterminant et même trace. On conclut que

$$\mathrm{Mat}(g,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & -\det(A) \\ 1 & \mathrm{tr}(A) \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire qu'il existe deux bases dans lesquelles f et g ont la même matrice. Ceci signifie que les endomorphismes f et g sont les mêmes et que les matrices A et ${}^tA$ sont conjuguées, d'après la formule de changement de base [1].

1. que ne connaissent pas encore les carrés...

Correction 4

Partie I : Cours en bourse d'une action

On s'intéresse aux **variations** journalières d'une action sur un marché financier, qu'on suppose aléatoires. On introduit, pour $j \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X_j correspondant à l'état de la variation de l'action le jour j. Naturellement, au début de l'observation, l'action n'a pas encore varié et on a $X_0 = 0$. On suppose de plus que, chaque jour, le cours de l'action :

- monte d'une unité $(+1)$ avec une probabilité p $(0 < p < 1)$;
- ou bien descend d'une unité (-1) avec la probabilité $q = 1 - p$.

On note X_{2n} le cours constaté le $2n^{ième}$ jour suivant le début de l'observation.

Par exemple, si $n = 2$ et que le cours a baissé les trois premiers jours et monté le quatrième jour, on a $X_4 = -1 - 1 - 1 + 1 = -2$.

Enfin, on note
$$p_n = P(X_{2n} \geq 0)$$
et on s'intéresse à l'évolution de p_n lorsque n devient grand, c'est à dire qu'on cherche à estimer la probabilité, après un grand nombre (pair) de jours, que le cours de l'action soit en hausse.

1. Simulation sous Python.

a. On utilise donc une boucle `for` pour parcourir les $2n$ jours. Avec probabilité p (ce qui se passe si `rd.rand() <=p`) on augmente de 1 et dans le cas contraire, on baisse de 1. Le programme est sans difficulté.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X_2(n, p) :
    x=0
    for k in range(2*n) :
        if rd.rand()<=p :
            x=x+1
        else :
            x=x-1
    return x
```

b. La liste `L` contient, à l'issue de la boucle `for` 1000 réalisations de X_{2n}. Ensuite on parcourt cette liste et lorsque le terme est positif, la variable `c` (initialisée à 0) augmente de 1. Cette variable compte donc le nombre de réalisations où $X_{2n} \geq 0$. On renvoie $c/1000$, c'est donc la fréquence observée de $[X_{2n} \geq 0]$ soit une *estimation* (ou valeur approchée) de $P(X_{2n} \geq 0)$.

c. On a représenté graphiquement l'évolution de l'estimation de $P(X_{2n} \geq 0)$ pour n variant de 1 en 200. Le nuage de points semble relativement concentré autour de $1/2$. Il est raisonnable de conjecturer que, dans le cas $p = 1/2$, on a
$$\lim_{n \to +\infty} P(X_{2n} \geq 0) = \frac{1}{2}.$$

2. Dans le pire des cas, on peut perdre 1 euro chaque jour pendant $2n$ jours et dans le meilleur des cas, gagner 1 euro chaque jour. Toutes les situations intermédiaires sont possibles, donc
$$X_{2n}(\Omega) = [\![-2n; 2n]\!].$$

3. On note Y_{2n} le nombre de jours (durant les $2n$ jours d'observation) où l'action a monté, et Z_{2n} le nombre de ceux où elle a baissé.

a. Les $2n$ jours se répartissent entre ceux où l'action monte et ceux où elle descend. Il est alors clair que

$$Y_{2n} + Z_{2n} = 2n.$$

b. Y_{2n} (resp. Z_{2n}) compte, parmi les $2n$ répétitions (chaque jour on répète le processus), le nombre de succès (l'action monte - resp. l'action baisse). Les évolutions étant indépendantes chaque jour, on a un schéma de Bernoulli répété de manière indépendante et donc des lois binomiales :

$$Y_{2n} \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, p), \qquad Z_{2n} \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, q).$$

Le cours donne directement

$$E(Y_{2n}) = 2np, \quad V(Y_{2n}) = 2npq, \quad E(Z_{2n}) = 2nq, \quad V(Z_{2n}) = 2nqp.$$

4. Chaque jour où l'action monte, on gagne 1 euro, il y a Y_{2n} jours où elle monte. Pour les Z_{2n} jours restant on perd 1 euros donc on "gagne" -1 euro. Au final, on a clairement

$$X_{2n} = Y_{2n} - Z_{2n}.$$

Par linéarité de l'espérance, on a donc

$$E(X_{2n}) = E(Y_{2n} - Z_{2n}) = E(Y_{2n}) - E(Z_{2n}) = 2np - 2nq = 2n(p - q).$$

Si $p = q = 1/2$, cette espérance est nulle, ce qui n'est pas surprenant. S'il est équiprobable que l'action monte ou descende chaque jours, après un nombre pair de jours, en son cours est en moyenne nul.

5. Soit $k \in [\![-n; n]\!]$. Remarquant que $X_{2n} = Y_{2n} - Z_{2n} = 2Y_{2n} - 2n$, et que $n + k \in [\![0; 2n]\!]$, on a

$$P(X_{2n} = 2k) \quad = \quad P(2Y_{2n} - 2n = 2k) = P(Y_{2n} = n + k) = \binom{2n}{n+k} p^{n+k} q^{n-k},$$

ce qui permet ensuite d'écrire

$$p_n = P(X_{2n} \geq 0) = \sum_{k=0}^{n} P(X_{2n} = 2k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n+k} p^{n+k} q^{n-k},$$

qui est bien la formule attendue.

Partie II : Des coefficients binomiaux

On considère la suite (S_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n+i} = \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} + \cdots + \binom{2n}{2n}.$$

6. **a.** D'après la définition de S_n, on a

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{i=0}^{1}\binom{2}{1+i} = \binom{2}{1}+\binom{2}{2}\\
&= 2+1=3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{i=0}^{2}\binom{4}{2+i} = \binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}\\
&= 6+4+1=11
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_3 &= \sum_{i=0}^{3}\binom{6}{3+i} = \binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}\\
&= 20+15+6+1=42.
\end{aligned}$$

b. On rappelle qu'en Python, la commande `np.prod(liste)` permet d'obtenir le produit des valeurs de la `liste` prise en argument.

(i) Par définition,

$$\binom{2n}{n+i} = \frac{(2n)!}{(n+i)!(n-i)!} = \frac{\prod\limits_{j=n-i+1}^{2n} j}{\prod\limits_{j=1}^{n+i} j}.$$

(ii) Ceci permet d'écrire, sans difficulté

```python
def suite_S(n):
  y=0
  for k in range(n):
    y=y+np.prod(range(n-i+1,2*n+1))/np.prod(range(1,n+i+1))
  return y
```

c. D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$\sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i} = \sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i}1^i1^{2n-i} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}.$$

d. Par définition,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{n+i} = \sum_{j=n}^{2n}\binom{2n}{j} &&\text{(d'une part)}\\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{n+i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{n-i} &&\text{(par symétrie)}\\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{n-i} = \sum_{j=0}^{n}\binom{2n}{j}
\end{aligned}$$

On a donc

$$2S_n = S_n + S_n = \sum_{j=0}^{n}\binom{2n}{j} + \sum_{j=n}^{2n}\binom{2n}{j} = \sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j} + \binom{2n}{n}.$$

Ceci permet, avec la question précédente,

$$2S_n = 2^{2n} + \binom{2n}{n},$$

ce qui donne bien, en divisant par 2,

$$S_n = 2^{2n-1} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}.$$

7. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_p = \binom{2p}{p} 2^{-2p}$.

a. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{u_{p+1}}{u_p} &= \frac{\binom{2(p+1)}{p+1} 2^{-2(p+1)}}{\binom{2p}{p} 2^{-2p}} \\ &= \frac{[2(p+1)]!p!p!}{2^2(p+1)!(p+1)!(2p)!} \\ &= \frac{(2p+2)(2p+1)}{2(p+1)2(p+1)} \\ &= \frac{2p+1}{2p+2}, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

b. On raisonne, comme demandé, par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$.

- initialisation. Pour $p = 1$, on a
$$0 \leq u_1 = \binom{2}{1} 2^{-2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$
car $\sqrt{3} \leq \sqrt{4} = 2$.

- hérédité. Supposons que, pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$, on ait
$$0 \leq u_p \leq \frac{1}{\sqrt{2p+1}}.$$
Alors, d'après la question précédente
$$\begin{aligned} u_{p+1} &= \frac{2p+1}{2p+2} u_p \leq \frac{2p+1}{2p+2} \frac{1}{\sqrt{2p+1}} = \sqrt{\frac{(2p+1)(2p+1)}{(2p+2)(2p+2)(2p+1)}} \\ &\leq \sqrt{\frac{2p+1}{(2p+2)^2}}. \end{aligned}$$
Or,
$$\begin{aligned} \frac{2p+1}{(2p+2)^2} \leq \frac{1}{2p+3} &\iff (2p+1)(2p+3) \leq (2p+2)^2 \\ &\iff 4p^2 + 8p + 3 \leq 4p^2 + 8p + 4 \\ &\iff 3 \leq 4, \end{aligned}$$
ce qui est vrai. On a donc la majoration voulue et la récurrence est terminée.

c. Par théorème des gendarmes, on peut donc conclure que
$$\lim_{p\to+\infty} u_p = 0.$$

8. On revient aux variables aléatoires de la Partie 1. On suppose, dans cette question que $p = 1/2$. On rappelle que $p_n = P(X_{2n} \geq 0)$.
On a, d'après la question précédente
$$\begin{aligned}
p_n &= P(X_{2n} \geq 0) = \sum_{k=0}^{n} P(X_{2n} = 2k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n+k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n+k} = 2^{-2n} S_n \\
&= 2^{-2n} \left(2^{2n-1} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}\right) \qquad \text{(d'après la Question (6d))} \\
&= \frac{1}{2} + \binom{2n}{n} 2^{-(2n+1)},
\end{aligned}$$
ce qu'on voulait.
On utilise les calculs ci-avant.
$$\begin{aligned}
p_1 &= 2^{-2} S_1 = \frac{3}{4}, \\
p_2 &= 2^{-4} S_2 = \frac{11}{16} \\
p_3 &= 2^{-6} S_3 = \frac{42}{64} = \frac{21}{32}.
\end{aligned}$$
On observe aussi que
$$p_n = \frac{1}{2}\left(1 + u_n\right).$$
En particulier,
$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2},$$
ce qu'on avait conjecturé à l'aide de Python.